Topología Profinita de Lenguajes Regulares

Pedro Villalba
pealviso@gmail.com
Facultad Politécnica - UNA, San Lorenzo. PARAGUAY
Doctorado en ciencias de la computación
Programa de incentivos para la formación de docentes – investigadores – Convocatoria 2015

RESUMEN

Resumen

Los lenguajes regulares son lenguajes formales reconocidos por autómatas finitos o máquinas de estado finito. Existen varias formas de caracterizar estos lenguajes y una de ellas es mediante su topología profinita. En este trabajo estudiamos la conexión entre lenguajes formales, polinomios no conmutativos y topología profinita.

INTRODUCCIÓN

Cadenas y lenguajes formales

Un *alfabeto* es cualquier conjunto finito Σ:

- Los elementos de Σ son denominadas *símbolos o letras* del alfabeto.
- Una *cadena* sobre un alfabeto Σ es una secuencia finita de letras del alfabeto Σ.
- Si w es una cadena sobre Σ, la longitud de w, denotado por $|w|$, es el número de letras que la componen, en particular $|w|_a$ indica el número de veces que aparece la letra a en la cadena w.
- Sea λ una cadena tal que $|\lambda| = 0$, la cual es denominada la *cadena vacía*.
- El conjunto de todas las cadenas (respectivamente todas las cadenas no vacías) sobre un alfabeto Σ es denotado por Σ^* (respectivamente Σ^+).

Cadenas y lenguajes

- Para $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, la yuxtaposición $w_1 w_2$ es llamada la *concatenación* de w_1 y w_2.
- La concatenación de cadenas:
  - es cerrada en Σ^* y Σ^+,
  - es asociativa,
  - además la cadena vacía λ actúa como identidad respecto a la concatenación.
- Así, Σ^* con la concatenación forma un monoide libre y
- Σ^+ con la concatenación es un semigrupo libre, generados ambos por el conjunto finito Σ.
- Los subconjuntos de Σ^* son denominados *lenguajes formales* sobre el alfabeto Σ.

Autómatas finitos

Un *autómata finito* (AF) M es una $5-upla$ $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

1. Q es un conjunto finito, llamado *conjunto de estados*.
2. Σ es un alfabeto
3. $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ es una función denominada *función de transición*.
4. $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*, y
5. $F \subset Q$ es el *conjunto de estados finales o de aceptación*.

Lenguajes regulares

Un lenguaje A se dice que es un *lenguaje regular o racional* si es reconocido por algún AF

Lenguajes reconocidos por un AF

Decimos que un AF M reconoce un lenguaje A, que se denota por $A = L(M)$, si

$$A = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ acepta } w\}$$

Preliminares

1. Consideremos el alfabeto Σ. Un morfismo $\varphi : \Sigma^* \longrightarrow M$ separa dos palabras u y v si $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. ($M$ es un monoide)
2. Definimos una distancia en Σ^* con la siguiente idea: dos palabras están más próximos mientras más grande sea el monoide necesario para separarlos, así
   1. $r(u, v) = \min\{|M| \mid M \text{ es un monoide que separa } u \text{ y } v\}$
   2. $d(u, v) = 2^{-r(u,v)}$
3. Con esto, (Σ^*, d) es un espacio métrico
4. Todo espacio métrico admite una completación
5. Los elementos de la completación de Σ^* son denominados *palabras profinitas* y su conjunto es denotado por $\widehat{\Sigma}^*$
6. La topología profinita en $\widehat{\Sigma}^*$, es la menor topología que hace continua cada morfismo de Σ^* a un monoide finito discreto.

Caraterización de lenguajes regulares

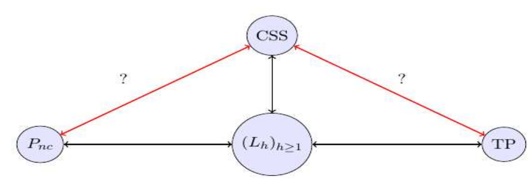
Sea $P \subset \widehat{\Sigma}^*$, son equivalentes

1. P es clopen
2. P es regular

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivos de la investigación

- Establecer la implicancia de la conjetura de Sakoda-Sipser sobre la topología profinita de los lenguajes regulares.
- Caracterizar topológicamente la conjetura de Sakoda-Sipser.



REFERENCIAS

Referencias

- J. É. Pin. 2012. *Mathematical Foundations of Automata Theory.* Notas de curso
- A. Salomaa. M. Soittola. 1978. *Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series*, Springer-Verlag.
- J. Sakarovitch. 2009. *Elements of Automata Theory*, Cambridge University Press.
- M. Sipser. 2006. *Introduction to the Theory of Computation*, Second Edition, Thomson Course Technology.

“Este proyecto es financiado por el CONACYT a través del Programa PROCIENCIA con recursos del Fondo para la Excelencia de la Educación e Investigación – FEEI del FONACIDE”